INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Programa de Fomento ao Uso das
TECNOLOGIAS DE COMUNICAÇÃO E INFORMAÇÃO NOS CURSOS DE GRADUAÇÃO - TICS

Cálculo Vetorial

Vasco Ricardo Aquino da Silva

Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

SUMÁRIO

TICs

A

Vetores

Unidade A
Cálculo Vetorial

UNIDADE A

VETORES

Características e Operações

É um elemento matemático representado por um segmento de reta orientado. Possuí **módulo** (que é o comprimento do segmento), **direção** e **sentido**.

Figura A.1
Fonte: do autor.

Indicamos um vetor definido por dois pontos da seguinte maneira:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

Vamos analisar algumas comparações entre vetores:

Vetores iguais

Mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido

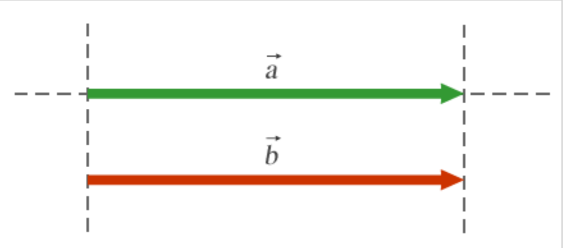


Figura A.2
Fonte: do autor.

Vetores opostos

Têm o mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos opostos.

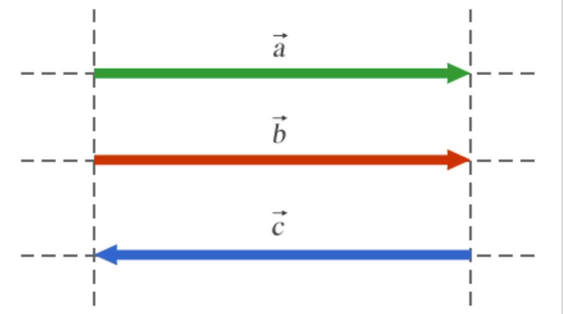


Figura A.3
Fonte: do autor.

Algumas definições são importantes dentro do estudo dos vetores, tanto para uma interpretação geométrica quanto para uma análise analítica.

1. Dois vetores são paralelos se os seus representantes tiverem a mesma **direção**.
2. Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo).
3. Um vetor é unitário se o seu módulo é igual a 1.
4. O versor de um vetor não nulo, é um vetor unitário, de mesma direção e mesmo sentido do vetor dado.

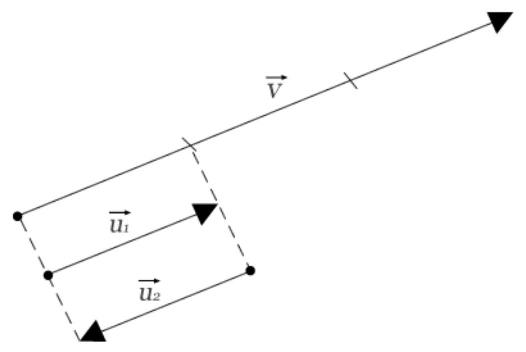


Figura A.4
Fonte: do autor.

Operações com vetores na forma geométrica

Adição de vetores

É utilizada na adição de qualquer quantidade de vetores.

Exemplo:

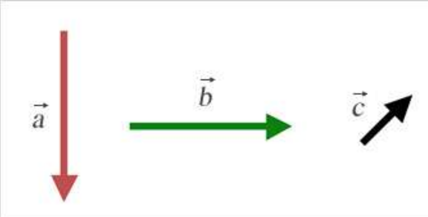


Figura A.5
Fonte: do autor.

Para somar os vetores acima, devemos posicionar cada vetor junto ao outro, de forma que a extremidade de um vetor coloque-se junto à origem do outro.

E o vetor soma, ou também chamado vetor resultante ($\vec{R}$), será o **vetor que une a origem do primeiro com a extremidade do último**, formando assim um polígono.

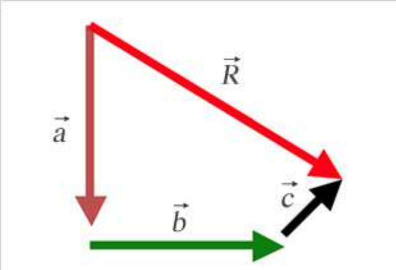


Figura A.6
Fonte: do autor.

Subtração de vetores

Realizar a subtração, $\vec{a}-\vec{b}$, é como somar a mais um vetor de mesma intensidade, mesma direção, porém, com sentido oposto ao do vetor $\vec{b}$ originalmente representado. Na realidade, estaremos fazendo a adição do vetor a com um vetor oposto ao vetor $b\,(a+(-b))$.

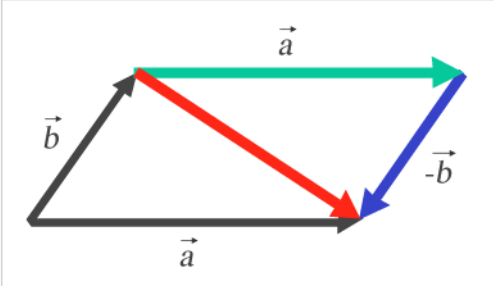


Figura A.7
Fonte: do autor.

Operações com vetores na forma analítica

Vetores no Plano

Qualquer vetor não nulo pode ser expresso em função de dois vetores não paralelos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

E neste caso dizemos que $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Então, escrevemos: $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2$

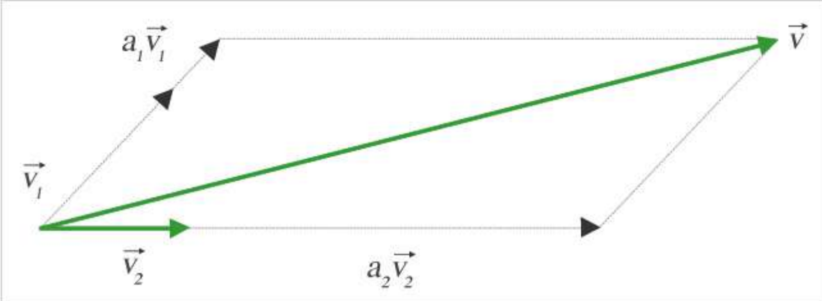


Figura A.8
Fonte: do autor.

Também dizemos que conjunto desses vetores:

$B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ forma uma base do $\Re^2$.

As bases mais utilizadas são as ortonormais àquelas em que os vetores são ortogonais e unitários.

Os vetores nesse sistema são representados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ambos com origem na origem dos eixos coordenados e extremidade em (1 , 0) e (1 , 0) respectivamente.

A base mais utilizada é chamada de **base canônica**:

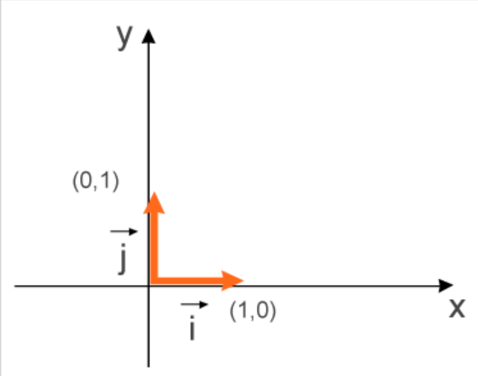


Figura A.9
Fonte: do autor.

Usando a base canônica determinamos a expressão analítica de um vetor:

Ou seja, tomando $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Escrevemos o vetor $\vec{v} = (x, y)$ portanto um vetor é um ponto do plano.

Exemplos:

Forma canônica	Forma analítica
$2\vec{i} + 3\vec{j}$	(2,3)
$2\vec{j}$	(0,2)
$-5\vec{i}$	(-5,0)
$-\vec{i} + \vec{j}$	(-1,1)

Vetores no espaço

Todas as propriedades estudadas para os vetores no plano continuam válidas no espaço, bastando para isso considerarmos a seguinte base canônica:

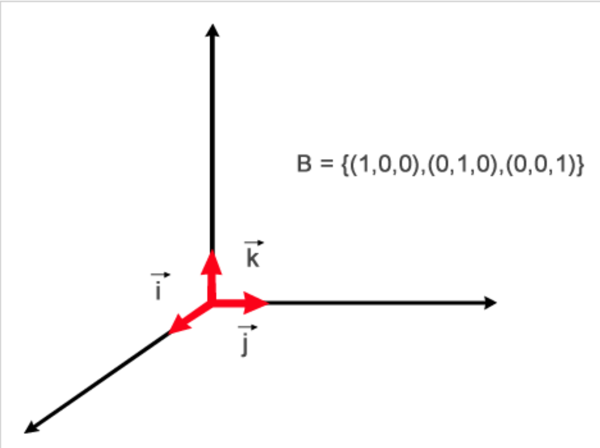


Figura A.10
Fonte: do autor.

UNIDADE A

ATIVIDADE

1. Em cada parte determine as coordenadas dos 8 cantos da caixa:

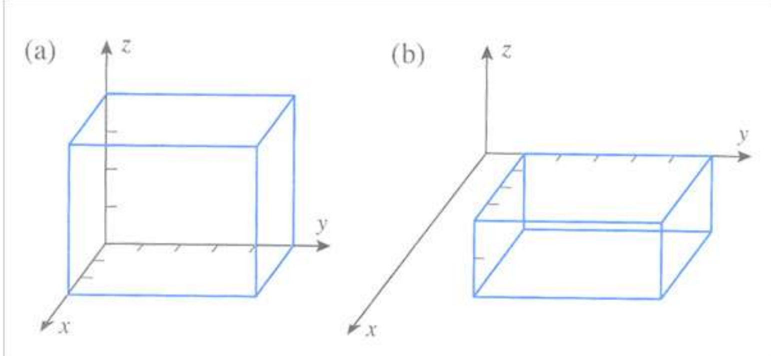


Figura A.11
Fonte: do autor.

2. Pesquise qual é a fórmula que calcula a distância entre dois pontos e aplique para as seguintes questões:

- **a.** (1,-2,0) e (-3,4,1)
- **b.** (5,3,-4) e (3,1,-4)
- **c.** (-1,-2,-3) e (1,2,3)
- **d.** (0,0,0) e (-5,2,-1)

5. Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor *v*=(-2,3), calcular:

- **a.** (B - A) + 2*v*
- **b.** (A - B) - *v*
- **c.** B + 2(B - A)
- **d.** 3*v* - 2(A - B)

Produto entre vetores

UNIDADE B

PRODUTO ENTRE VETORES

Produto escalar

Chama-se produto escalar de $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ número real $\vec{u}.\vec{v}$ dado por:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Exemplo:

$\vec{u}=(-2,1,5)$

$\vec{v}=(0,-4,3)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2)(0)+(1)(-4)+(5)(3)=0-4+15=11$

Aplicações do produto escalar

Uma aplicação importante do produto escalar é a **condição de ortogonalidade** entre vetores:

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Exemplo:

Os vetores $\vec{u}=(2,-4)$ e $\vec{v}=(4,2)$ são ortogonais, pois fazendo o produto escalar o resultado é zero.

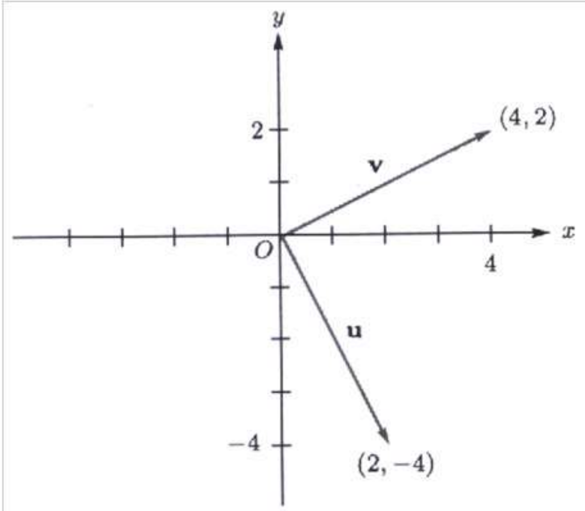


Figura B.1
Fonte: do autor.

Outra aplicação importante é o cálculo do ângulo entre dois vetores: A fórmula é dada por $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Exemplo:

Calcular o ângulo entre os vetores:

$$u=(1,1,4)\;\; e \;\; v=(-1,2,2)$$

$$\cos\theta=\frac{(1,1,4)(-1,2,2)}{|(1,1,4)||(-1,2,2)|}=\frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta=arc\ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45^{\circ}$$

Produto vetorial

O produto vetorial de $\vec{u}\times\vec{v}$ é o vetor de módulo igual à área do paralelogramo definido pelos dois vetores e direção perpendicular ao plano do paralelogramo.

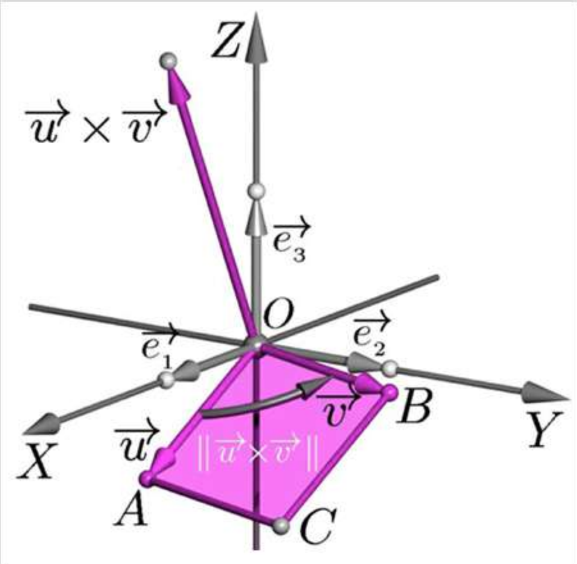


Figura B.2
Fonte: do autor.

Para facilitar o cálculo desse produto vetorial, utilizaremos a seguinte notação: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$

Exemplo:

Dados $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ e $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ determine *u* vetorial *v*:

$$u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$-1+12j-5k=(-1,12,-5)$$

A interpretação geométrica do módulo do produto vetorial é numericamente igual à área do paralelogramo formado por esses vetores:

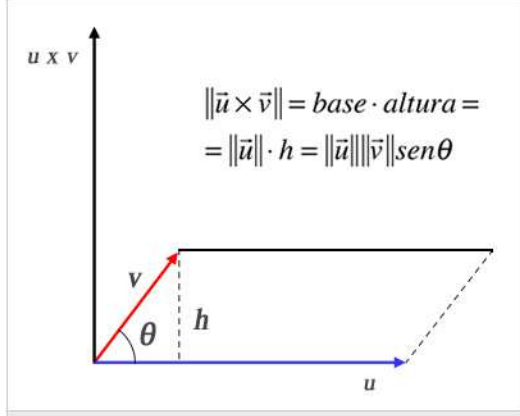


Figura B.3
Fonte: do autor.

Produto misto

Dados os vetores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ definimos o produto misto entre *u*, *v* e *w*, denotado por [*u,v,w*] ou por *u*.(*v×w*), como o número real obtido a partir do determinante

$$[u,v,w]=u\cdot(v\times w)=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

O resultado do produto misto é um NÚMERO REAL.

Exemplo:

Dados os vetores $\vec{u}=(2,1,3)$, $\vec{v}=(0,-1,2)$ e $\vec{w}=(2,2-1)$ calcule o produto misto $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ 2 & 2\end{matrix}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(+2+4+0)-(-6+8+0)$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=4$$

A interpretação geométrica do módulo do produto misto é numericamente igual ao volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

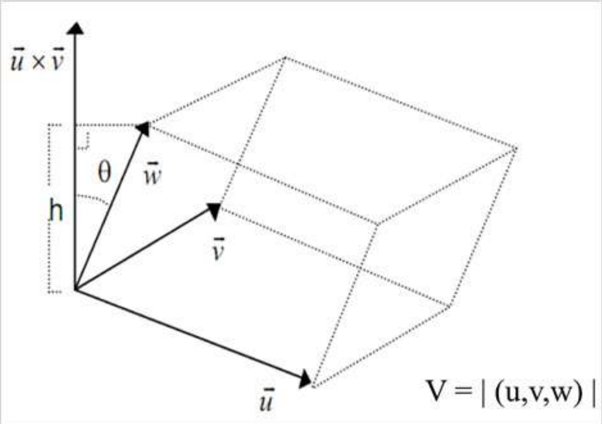


Figura B.4
Fonte: do autor.

Exemplo:

Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores:

$\vec{u} = (1,1,5)$ $\quad \vec{v} = (0,3,2)$ $\quad \vec{w} = (2,2,1)$

$$v = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| = |-27| = 27$$

UNIDADE B

ATIVIDADE

Assistir ao vídeo seguindo o link abaixo

http://www.youtube.com/watch?v=pVZucIu-icY&feature=related

Resolver os seguintes exercícios.

1. Dados os vetores $\vec{u} = (2,-3,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,4)$, calcule:

a. $2\vec{u}.\vec{v}$
b. $(u+3v).(v-2u)$
c. $(u+v).(u-v)$

2. Determine o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $u = (2,-1,3)$, tal que $\langle v, u \rangle = -42$.
(pesquise essa notação usada).

3. Determine o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo das ordenadas, $\langle v, v_1 \rangle = 8$ e $\langle v, v_2 \rangle = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (-1,1,1)$.

4. Sabendo que $|u| = 2$, $|v| = 3$ e $\langle u, v \rangle = -1$, calcule $\langle (u+v), (v-4u) \rangle$.

5. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20cm. Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

6. Calcule o valor de *m* de modo que seja 120º o ângulo entre os vetores $u = (1,-2,1)$ e $v = (-2,1,m+1)$.

7. Dados os vetores $\vec{u} = 3i - j - 2k$, $v = (2,4,-1)$ e $w = -i + k$ calcule:

a. $|\vec{u} \times \vec{u}|$
b. $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$
c. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$
d. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
e. $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$

8. Dados os pontos A(2,1,-1), B(3,0,1) e C(2,-1,-3), determine o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

9. Dados os vetores $\vec{u} = (3,1,1)$, $\vec{v} = (-4,1,3)$ e $\vec{w} = (1,2,0)$ determine $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

10. Dados os vetores $\vec{u} = (3,-1,1)$, $\vec{v} = (1,2,2)$ e $\vec{w} = (2,0,-3)$, calcule:

a. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
b. $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

Retas e Planos

Unidade C
Cálculo Vetorial

UNIDADE C

RETAS E PLANOS

Nesta unidade faremos um tratamento analítico da reta e do plano, utilizando os conceitos de vetores vistos anteriormente.

Estudo da reta

Consideremos a reta "r" que passa pelo ponto $A(x_0,\ y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor **não nulo** $\vec{v} = (a,b,c)$

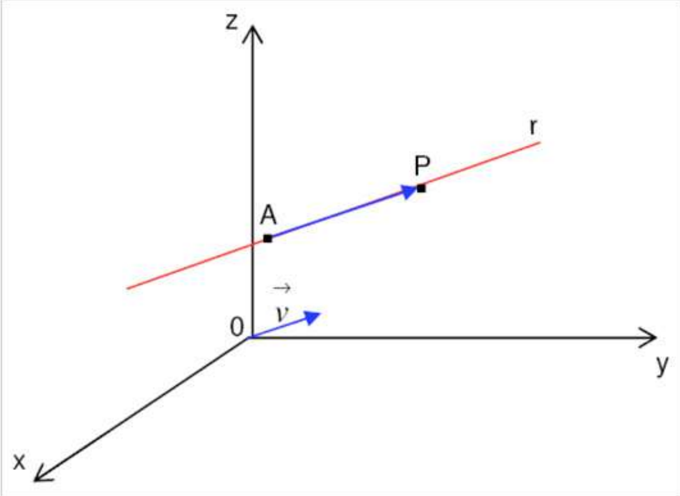


Figura C.1
Fonte: do autor.

Sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer (variável) de "r" temos $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}, t \in IR$ que é a equação vetorial da reta.

As outras equações utilizadas são :

- A equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, t \in IR \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- A equação simétrica;

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

- A equação reduzida:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

TICs

UNIDADE C

ATIVIDADES

Exercícios

1. Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto A(3,0,-5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Você deve encontrar como resposta: $(x,y,z) = 3 + 2t, 2t, -5 - t), t \in IR$

2. Determine as equações paramétricas da reta r, que passa pelo ponto A(3,-1,2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3,-2,1)$

Você deve encontrar como resposta: $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

3. Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto A(3,0,-5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Você deve encontrar como resposta: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+5}{2}$

4. Estabeleça as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos A(2,1,-3) e B(4,0,-2).

Você deve encontrar como resposta: $y = \dfrac{-x+4}{2}$ e $z = \dfrac{x-8}{2}$

Resumo

Assista às apresentações **"Estudo da Reta"** e **"Estudo do Plano"**, em Power Point, e faça um resumo sobre ela.

Funções de várias variáveis

Unidade D
Cálculo Vetorial

UNIDADE D

FUNÇOES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Todas aquelas regras válidas para as quantidades escalares são válidas para as quantidades vetoriais.

O conceito de derivada parcial pode ser aplicado geometricamente para encontrar a inclinação de uma superfície na direção de x e y.

Podemos aplicar as derivadas parciais como taxa de variação e essa interpretação envolve muitos fenômenos físicos.

Definições

Função de Duas Variáveis

Uma função real f de duas variáveis é uma relação que a cada par ordenado de números reais (x, y) associa um único número real $z=f(x, y)$.

Figura D.1
Fonte: do autor.

As funções de duas variáveis aparecem em muitas situações práticas, tais como:

- Áreas de figuras que dependem da altura e da largura.
- Volumes que dependem da altura e do raio.

Representações

As funções de duas variáveis podem ser representadas graficamente por superfícies em sistema tridimensional de coordenadas.

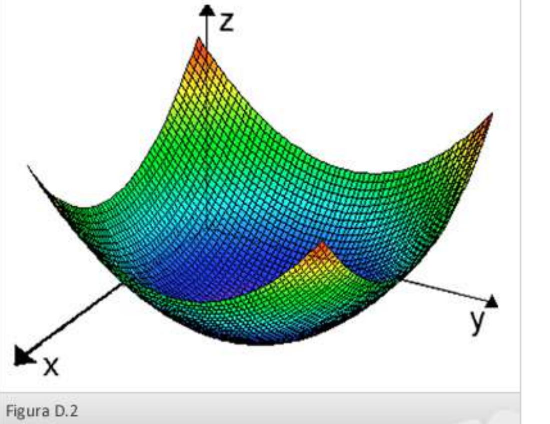
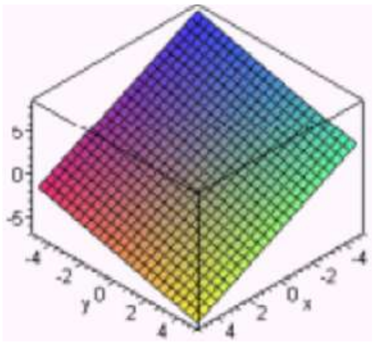


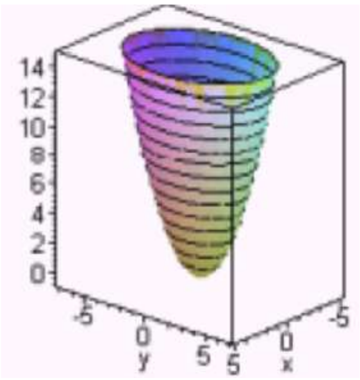
Figura D.2
Fonte: do autor.

Alguns gráficos de funções de duas variáveis:



Equação: ***z = ax + by + c***

Superfície gerada: **Plano**



Equação: ***z = ax² + by² + c***

Superfície gerada: **Paraboloide elíptico**

Características

Podemos classificar as funções de duas variáveis em explícitas ou implícitas.

Explícitas

Podem ser colocadas na forma : $z = f(x, y)$

Implícitas

Podem ser colocadas na forma: $f(x, y) = 0$

Funções de várias variáveis

Definição: Diz-se que *z* é uma **função** de *x, y,...,t,* e escreve-se *z=f(x,y,....t)*, quando a correspondência entre *z* e o conjunto (*x, y, ...,t*) é tal que para cada grupo (x_i, y_i,...., t_i) o valor de z_i fique univocamente definido.

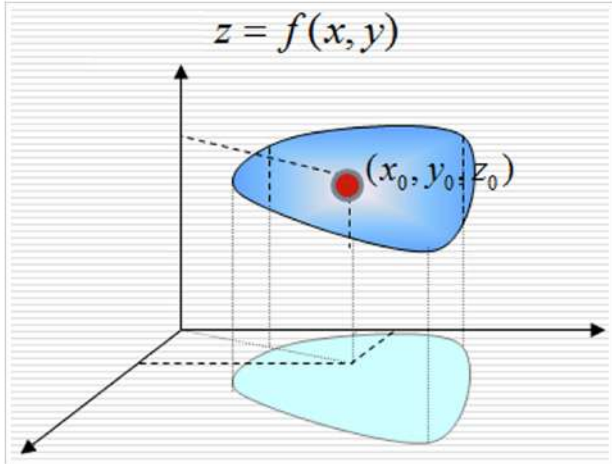


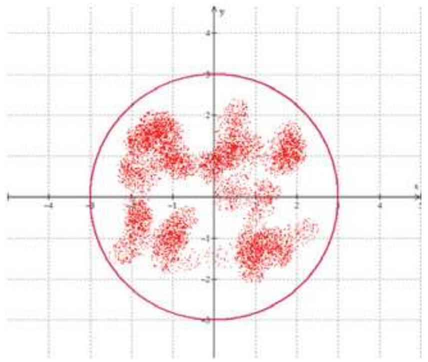
Figura D.3: Representação gráfica de uma função de duas variáveis
Fonte: do autor.

Domínio de *f(x,y, ...t)*: é o conjunto de todos os valores (*x,y, ...t*) possíveis para as variáveis independentes.

Exemplo:

Determine o domínio da função abaixo e represente-o graficamente

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$
$$9 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 9$$
$$Dom\ f = (x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 9$$



Limites de funções de duas variáveis

Dada uma função *f(x,y)*, dizemos que o limite de *f* é igual a *L* quando (*x,y*) se aproxima de um ponto de referência (*a,b*), se pudermos tornar os valores de *f(x,y)* tão próximos de *L* conforme (*x,y*) se aproximar de (*a,b*).

$$\lim_{x \to ab} f(x,y) = L$$

Para se estimar o limite de uma função de duas variáveis f no ponto (x_0, y) é necessário calcular esse valor por todas as **trajetórias** que passem por este ponto. Se em todos os casos o resultado for sempre o mesmo, digamos *L*, diz-se que o limite existe e que vale *L*.

Caso o limite não exista em alguma trajetória ou dê um valor diferente para trajetórias diferentes, dizemos que o limite não existe.

Exemplo

Mostre que a função abaixo não tem limite quando (*x,y*) se aproxima de (0,0).

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y}$$

Tentamos calcular o limite por substituição direta, o que gera a indeterminação 0/0.

Tomamos uma trajetória que passe pelo ponto (0,0), *y=kx²*.

$$f(x,kx^2) = \frac{2x^2kx^2}{x4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

$$\frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}}{ao\ longo\ de\ y=kx^2} f(x,y) = \frac{2k}{1+k^2}$$

Note que este limite varia de acordo com o valor escolhido para *k*. Logo, este limite não existe.

Continuidade

Uma função *f(x,y)* é contínua no ponto (x_0, y_0) se:

$$\left.\begin{array}{l}(i)\ \ Existir\ f(x_0,y_0);\\ (ii)\ \ Existir \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\end{array}\right\}\ (iii) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

UNIDADE D

ATIVIDADES

Usando o programa *winplot* para traçado de gráficos

O programa *winplot* pode ser usado para uma melhor visualização de gráficos com duas variáveis.
No site http://www.gregosetroianos.mat.br/softwinplot.asp existe uma boa explicação sobre o uso desse programa.

Resolver os seguintes exercícios

1. Seja a função dada por $f(x,y) = \ln(y-x)$. Determine:

- **a.** *f*(1,2)
- **b.** *f*(0,0)
- **c.** *f*(-3, -4)
- **d.** Domínio *f*
- **e.** Imagem *f*

2. Um tanque para estocagem de oxigênio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro circular reto de raio r e de altura l (em metros), com um hemisfério em cada extremidade. Descreva o volume do tanque em função da altura l e do raio r.

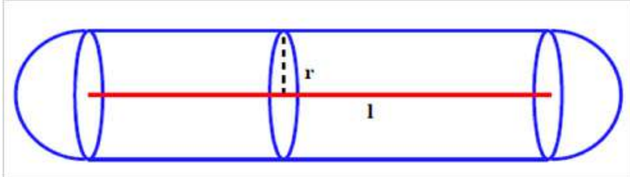


Figura D.4
Fonte: do autor.

3. Encontre o domínio das seguintes funções:

- **a.** $f(x,y) = 2x - y^2$
- **b.** $f(x,y) = \dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$
- **c.** $f(u,v,w) = \dfrac{uw}{u-2v}$
- **d.** $f(x,y) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{4-y^2}$
- **e.** $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$
- **f.** $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$
- **g.** $f(x,y) = \dfrac{\cos(x)(y^2-1)}{x^2-y^2}$

h. $f(x,y) = \log(36 - 4x^2 - 9y^2)$

i. $f(x,y) = \log(x^2 - y^2 - 1)$

4. Esboce o gráfico do domínio de cada uma das funções abaixo:

a. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b. $fx, y = \dfrac{x}{x - y}$

c. $f(x, y) = arcsen(x + y)$

d. $f(x, y) = \ln(y - x)$

TICs

Derivadas parciais

Exercícios

Unidade E

Cálculo Vetorial

UNIDADE E

DERIVADAS PARCIAIS EXERCÍCIOS

1. Dada a função f(x, y) = $x^2 - y^2 + 3x - 4$, calcule:

a) f(0 ,0) =

b) f(3, 4) =

c) f(2, t) =

d) os valores de x para os quais f(x, y) = $-y^2$

2. Encontre uma função de várias variáveis que nos dê:

a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.

b) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura x e comprimento y.

c) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros.

d) O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

e) A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

f) A temperatura nos pontos de uma esfera, se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual a distância do ponto ao centro da esfera.

3. Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

a) $z = x^2 . sen\ y$

b) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 4y^2$

c) $z = sen(3x)\ .\ \cos(2y)$

d) $f(x,\ y,\ z) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$

4. Determinar as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ das funções abaixo:

a) $z = x^2 + 3y^2 + 4xy + 1$

b) $z = x2\ sen\left(2xy\right)$

c) $z = e^{x^2 - 2y^2 + 4x}$

d) $z = \dfrac{1}{x + 2y + 1}$

5. Dado o ponto $P(-1,\ 4)$, $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ calcule:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,4)$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,4)$

6. A função $T(x, y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontre a razão de variação da temperatura em relação à distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y, no ponto (1, 2). Considere a temperatura medida em graus Celsius e a distância em cm.

7. Determine as derivadas parciais de 2a ordem das seguintes funções:

a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$

b) $z = x^2y^2 - xy$

c) $z = \ln xy$

d) $z = e^{xy}$

8. Se $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ela é dita uma função harmônica. Verifice se as funções dadas são harmônicas:

Funções vetoriais

Exercícios

Unidade I

Cálculo Vetorial

UNIDADE

EXERCÍCIOS

Funções Vetoriais: Introdução

1. Determine o domínio de r(t) e o valor de r(t_0):

a) $r(t) = \cos t\, i - 3t\, j; \quad t_0 = \pi$

b) $r(t) = (\sqrt{3t+1}, t^2); \quad t_0 = 1$

c) $r(t) = \cos \pi t\, i - \ln t\ j + \sqrt{t-2}\, k; \quad t_0 = 3$

d) $r(t) = (2e^{-t}, arc\ sen\, t, \ln(1-t)); \quad t_0 = 0$

2. Descreva o gráfico da equação:

a) $r = (3-2t)i + 5t\, j$

b) $r = 2t\, i - 3\, j + (1+3t)\, k$

c) $r = 3i + 2\cos t\ j + 2 sen\, t\, k$

d) $r = 2\cos t\, i - 3\, sen\, t\ j + k$

e) $r = -3i + (1-t^2)\, j + tk$

3. 3. Obtenha a inclinação da reta que está representada por r = (1-2t) i-(2-3t)j.

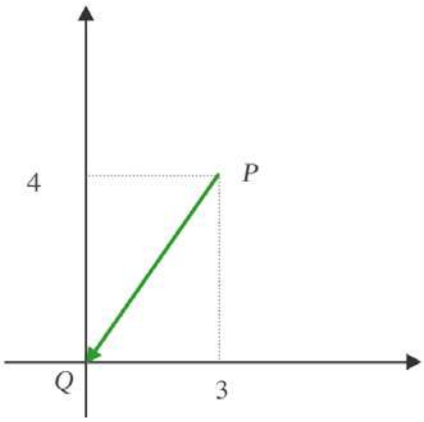
4. Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta r= (2+t)i +(1-2t)j +3t k intersecta o plano xy.

5. Esboce o segmento de reta representado pela equação:

a) $r = (1-t)i + tj; \ \ 0 \le t \le 1$

b) $r = (1-t)(i+j) + t(i-j); \ \ 0 \le t \le 1$

6. Escreva uma equação vetorial para o segmento de reta de P a Q:



7. Esboce o gráfico de r(t) e mostre o sentido de t crescente:

a) $r(t) = 2i + tj$

b) $r(t) = (3t - 4, 6t + 2)$

c) $r(t) = (2\cos t, 5sen\ t);\ \ 0 \le t \le 2\pi$

d) $r(t) = (1 + \cos t)i + (3 - sen\ t)j; 0 \le t \le 2\pi$

e) $r(t) = 2\cos t\, i + 2sen\ t\ j + tk$

f) $r(t) = ti + t^2 j + 2k$

Lista - Integrais de linha

Unidade J
Cálculo Vetorial

UNIDADE J

LISTA – INTEGRAIS DE LINHA

1. Determine se r(t) é uma função lisa de parâmetro t:

a. $r(t) = t^3 i + (3t^2 - 2t) j + t^2 k$

b. $r(t) = \cos t^2 i + sen\ t^2 j + e^{-t} k$

c. $r(t) = te^{-t} i + (t^2 - 2t) j + \cos \pi t\, k$

d. $r(t) = sen\ \pi t\ i + (2t - \ln t) j + (t^2 - t) k$

2. Encontre o comprimento de arco do gráfico de r(t):

a. $r(t) = t^3 i + tj + \frac{1}{2}\sqrt{6}\ t^2 k;\quad 1 \le t \le 3$

b. $r(t) = (4 + 3t) i + (2 - 2t) j + (5 + t) k;\quad 3 \le t \le 4$

c. $r(t) = 3\cos t\ i + 3\ sen\ t\ \ j + t\, k;\quad 0 \le t \le 2\pi$

d. $r(t) = t^2\, i + (\cos t + t\ sen\ t) j + (sen\ t - t\cos t) k;\quad 0 \le t \le \pi$

3. Calcule a integral de linha em relação a s ao longo da curva C:

$$\int_C \frac{1}{1+x} ds \qquad C : r(t) = ti + \frac{2}{3} t^{3/2} j \qquad (0 \le t \le 3)$$

$$\int_C 3x^2 yz\ ds \qquad C : x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3} t^3 \qquad (0 \le t \le 1)$$

4. Em cada parte, calcule a integral $\int_C (3x + 2y) dx + (2x - y)\ dy$ ao longo da curva indicada:

a. O segmento de reta de (0,0) até (1,1).

b. O arco parabólico $y=x^2$ de (0,0) a (1,1).

c. A curva $y = sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ de (0,0) até (1,1).

d. A curva $y=x^3$ de (0,0) até (1,1).

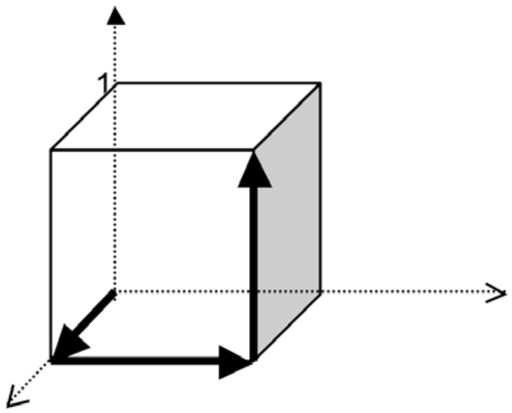
5. Calcule a integral de linha ao longo da curva C:

$$\int_C -ydx + xdy \qquad C: y^2 = 3x \quad de \quad (3,3) \quad até \quad (0,0)$$

$$\int_C (x^2 + y^2)dx - xdy \qquad C: x^2 + y^2 = 1, \quad no \ sentido \ anti-horário \ de \quad (1,0) \quad até \quad (0,1)$$

$$\int_C yzdx - xzdy + xydz \qquad C: x = e^t, y = e^{3t}, z = e^{-t}; \quad (0 \le t \le 1)$$

6. Calcule $\int_C x^2zdx - yx^2dy + 3dz$ ao longo da curva C mostrada na figura.



7. Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3\cos t,\ y = 3\,sen\ t,\ z = 4t \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ se a função de densidade for $\delta = \frac{kx}{1+y^2}$, k>0.

8. Calcule a massa de um arame fino com o formato do arco circular $y = \sqrt{9 - x^2}$ $(0 \le x \le 3)$ se a função de densidade for $\delta = x\sqrt{y}$.

Campos Vetoriais

Exercícios

Unidade K

Cálculo Vetorial

UNIDADE K

K.6 EXERCÍCIOS

Campos Vetoriais

1. Esboce o campo vetorial desenhando alguns vetores que não se intersectem:

a. F(x,y)= 2i-j

b. F(x,y)=(y,-x)

c. F(x,y)=yj

2. Determine a divergência e o rotacional dos seguintes campos de vetores:

a) $F(x,y,z)=(x+y+z\ x^2,x)$

b) $F(x,y,z)=(x+y+z,x^2,yz)$

c) $F(x,y,z)=(x^2+y^3+z^4,xyz,xz+yz)$

d) $F(x,y,z)=(xyz^2,xy^3z,-xyz^3)$.

e) $F(x,y,z)=(\cos(x)\ sen(y),\cos(xz),sen(yz))$

f) $F(x,y,z)=(e^x\cos(y),e^x\ sen(y),0)$

g) $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,xy,xyz)$.

h) $F(x,y,z)=(xy^2,2xy^2z,3xy^2z)$

i) $F(x,y,z)=(\cos(xy),\cos(yz),sen(xz))$.

3. Determine se os seguintes campos são conservativos e , em caso afirmativo, ache o seu potencial:

a) $F(x,y,z)=(2xz+y^2,2xy,e^z+x^2)$

b) $F(x,y,z)=(xy,e^x,e^z)$

c) $F(x,y,z)=(ln(xy),ln(yz),ln(zx))$

d) $F(x,y,z)=(e^x,2e^y,3e^z)$

e) $F(x,y)=(10xy+y\ sen(xy),5x^2)$

f) $F(x,y,z)=(1+y\ sen(xy),1-\cos(xz,z))$

g) $F(x,y,z)=(6xy+z^3,3x^2-z,3x^2-y)$

4. Ache o valor das constantes a, b e c tais que o campo de vetores seja irrotacional:

a) $F(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$

b) $F(x,y,z) = (x + 2y + az, bx - 3y - z, 4x + cy + 2z)$

5. Calcule $\nabla.(FXG)$ sendo F(x,y,z)=2xi+j+4yk e G(x,y,z)=x i+y j-z k.

6. Calcule $\nabla.(\nabla XF)$ sendo Fx,y,z)=sen x i+cos (x-y)j+zk.

7. Calcule $\nabla X(\nabla XF)$ sendo F(x,y,z)=xy j+xyz k.

8. Verifique que o vetor posição r=x i+y j+z k tem as seguintes propriedades:

a) Rot r = 0

b) Div r =3

9. Dada a função F(x,y,z)=(x^2-y,x^3+z^2,-3xyz) determine rot (x,y,z) em P(1,1/3,-1).